УДК 338.24.01

Г. Ю. Башашкина
Военный университет, Москва, e-mail: Bashashkina@mail.ru

СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫХ В ВООРУЖЕННЫХ СИЛАХ

Ключевые слова: симплексный метод, задача линейного программирования, универсальность, компьютерные расчеты, несложные примеры, методы решения, линейное программирование, решаемые задачи, точность, достоверность, экономические результаты, степень учета, свойства, системность объекта, метод реальный объект, модель, сложные системы, современные технологии, процессы.

В статье рассмотрены возможности экономико-математического применения симплексного метода, который является наиболее универсальным методом последовательного улучшения плана. Симплексный метод позволяет найти решение любой задачи линейного программирования, имеющей решение, проделав определенное число шагов, на каждом из которых выполняется по установленным правилам алгебраические преобразования. Задача обусловлена своеобразием конечного результата деятельности, трудностью соизмерения его с затратами, разнообразием видов обеспечения (боевое, материальное, финансовое и др.) и спецификой экономических отношений (система заказов военной техники, ее оплаты, учета и хранения; условия дислокации). Конечный результат деятельности всех элементов структуры Вооруженных Сил является нематериальным представляет собой боевую готовность войск, позволяющую сдерживать агрессивные намерения потенциального противника в мирное время, а также выполнять боевые задачи в случае развязывания агрессивными силами войны. Для этого необходимо совершенствовать военную технику, обучать и воспитывать личный состав, а значит, повышать боеготовность Вооруженных Сил. Это требует расхода бюджетных средств.

G. Yu. Bashashkina
Military University, Moscow, e-mail: Bashashkina@mail.ru

SIMPLEX METHOD OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS USED IN THE ARMED FORCES

Keywords: simplex method, linear programming problem, universality, computer calculations, simple examples, solution methods, linear programming, solved problems, accuracy, reliability, economic results, accounting degree, properties, object consistency, real object method, model, complex systems, modern technologies, processes.

The article considers the possibilities of economic and mathematical application of the simplex method, which is the most universal method for sequential improvement of the plan. The simplex method allows you to find a solution to any linear programming problem that has a solution by performing a certain number of steps, each of which is performed according to the established rules of algebraic transformations. The task is determined by the uniqueness of the final result of the activity, the difficulty of measuring it with costs, the variety of types of support (combat, material, financial, etc.) and the specifics of economic relations (the system of orders for military equipment, its payment, accounting and storage; conditions of deployment). The end result of the activities of all elements of the Force structure is an intangible represents the combat readiness of the troops to contain the aggressive intentions of a potential enemy in peacetime and to carry out fighting tasks in the event of the outbreak of the aggressive forces of war. To do this, it is necessary to improve military equipment, train and educate personnel, and therefore increase the combat readiness of the Armed Forces. This requires the expense of budgetary funds.

Информационно-программные технологии современных исследований достигаются прежде всего с помощью формализованного представления изучаемого объекта в виде математических моделей программно реализуемых на программном продукте в составе автоматизированных систем анализа. Этому способствует также применение формализованных моделей принятия решений, предполагавших использование разными моделями исследуемых объектов.

Повышение уровня научных исследований и оперативности получения результатов требует комплексного и активного использования симплексного метода задач линейного программирования, а также исследования операций и принятия решений на основе системного подхода и математического моделирования [3] с включением информационно-программных технологий процесса исследования.

Модель принятия рационального выбора содержит критерии оценивания предпочтительности сравниваемых вариантов решения и выделения среди них рационального варианта. Она ориентируется на многовариантный подход к формированию сравниваемых решений и использование принципа компромисса для выбора рационального варианта среди недоминируемых вариантов решений.

Реальным инструментом подготовки решений и рекомендаций по снижению затрат на мероприятия военного строительства стал симплексный метод, который впервые был описан профессором С.Ф. Викуловым в военно-экономическом анализе для применения в ВС РФ.

На его основе созданы специальные организационные структуры центрального и войскового звена управления военной организацией Российской Федерации, которые систематически выполняют исследовательские работы по различным видам анализа (анализ хозяйственной деятельности, технико-экономический анализ и т. д.), а также проводится оценка эффективности применения программ по расчету и контролю военных расходов на оборону государства.

В то же время до сих пор такие понятия, как военно-экономическая эффективность, военно-экономический анализ остаются объектами научных дискуссий. Необходимость комплексной оценки эффективности военно-экономического обеспечения безопасности России обусловлена возникновением новых внешнеполитических и макроэкономических условий функционирования военной организации России в начале XXI в. [4].

В условиях жестких бюджетных ограничений, которые являются скорее правилом, чем исключением, и характерны для всех времен и государств, уровень боевой готовности войск (сил) все больше становится зависимым не только от объема ресурсов, выделяемых на оборону и безопасность страны, но и от эффективности их использования [2].

Наиболее универсальным является так называемый симплексный метод (метод последовательного улучшения плана). Симплексный метод позволяет найти решение любой задачи линейного программирования, имеющей решение, проделав определенное число шагов, на каждом из которых выполняется по установленным правилам алгебраические преобразования. Истоки симплексного метода и его суть.

Впервые симплексный метод был предложен американским ученым Дж. Данцигом в 1949 г., однако еще в 1939 г. идеи метода были разработаны российским ученым Л.В. Канторовичем.

Симплексный метод, позволяющий решить любую задачу линейного программирования, универсален. В настоящее время он используется для компьютерных расчетов, однако несложные примеры с применением симплексного метода можно решить и вручную. Рассмотрим задачу линейного программирования симплексного метода решения задачи линейного программирования

$$\begin{gathered} F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to max, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{gathered} \tag{4}$$

В ней имеется n переменных и m независимых линейных ограничений-равенств. Введем понятие системы с базисом. Известно, что m линейно независимых уравнений (4) всегда можно разрешить относительно каких-то m переменных, выразив их через остальные $k = n - m$ переменные.

Линейная система уравнений называется системой с базисом, если в каждом уравнении содержится переменная с коэффициентом, равным единице, отсутствующая во всех других уравнениях (т. е. входящая в эти уравнения с коэффициентом 0). Такие переменные называются базисными, остальные – свободными. Совокупность базисных переменных образует базис системы. Число базисных переменных очевидно, равно числу независимых уравнений. Система с базисом всегда совместна, так как она обладает, по крайней мере, одним решением, а именно, если положить свободные переменные равными нулю, то базисные переменные окажутся равными свободным членам соответствующих уравнений. Полученное таким образом решение называется базисным.

Среди различных базисных решений могут быть такие, которые дают отрицательные значения некоторых переменных. Это имеет место, когда некоторые свободные члены соответствующих уравнений отрицательны. Такие базисные решения противоречат условию не отрицательности переменных задачи линейного программирования и являются недопустимыми. Допустимым базисным решением является такое базисное решение, которое дает неотрицательные значения базисных переменных. Любому допустимому базисному решению соответствует вершина многогранника допустимых решений (опорная точка), определенного с помощью системы ограничений – равенств и условий не отрицательности переменных. Решение задачи линейного программирования, обращающее в максимум целевую функцию *F*, обязательно лежит среди допустимых базисных решений.

Если нам известны какая-то вершина и значение целевой функции в ней, то все те вершины, в которых целевая функция принимает худшее значение (т. е. меньшее в случае задачи на максимум и большее в случае задачи на минимум) нам заведомо не нужны. Поэтому естественно стремление найти способ перехода от данной вершины к лучшей, от нее – к еще лучшей и т.д. Такой способ должен быть дополнен еще, очевидно каким-то признаком того, что лучших чем найденная вершин вообще нет, и признаком того, что данная задача вообще не имеет оптимального решения. В этом и заключается суть симплексного метода поиска решения задачи линейного программирования:

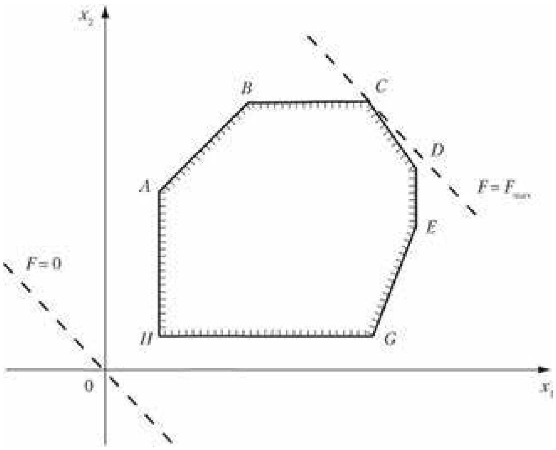
- тем или иным способом находится какая-нибудь вершина многогранника допустимых решений и по определенному правилу проверяется, не является ли она оптимальной. Если она оптимальна – задача решена.

А) Если нет, то по определенному правилу проверяется, нельзя ли утверждать, что задача не имеет оптимального решения (целевая функция не достигает наибольшего значения из-за неограниченности многограннике допустимых решений в направлении роста целевой функции). Если утверждать это можно, то задача неразрешима.

Б) Если нельзя, то по определенному правилу отыскивается новая соседняя, лучшая вершина и осуществляется возврат к 1, в качестве рассматриваемой принимается эта новая вершина.

Гарантируется, что описанный процесс через конечное число переходов к новым вершинам закончится либо на 1, либо на 2. Такой перебор позволяет сократить число шагов при отыскании оптимума. Поясним это на графическом примере.

Пусть область допустимых решений изображается многоугольником *ABCDEGH* (рисунок) [8]. Предположим, что его угловая точка *A* соответствует исходному допустимому базисному решению.



Геометрическая иллюстрация симплексного метода

При беспорядочном переборе пришлось бы испытать семь допустимых базисных решений, соответствующих семи угловым точкам многоугольника. Однако из чертежа видно, что после вершины А выгодно перейти к соседней вершине В, а затем к оптимальной точке С.

Вместо семи перебрали только три вершины, последовательно улучшая линейную функцию. Идея последовательного улучшения решения легла в основу универсального метода решения задач линейного программирования – ***симплексного метода*** [3].

Поскольку получение решения задачи линейного программирования сводится к рациональному перебору вершин многогранника допустимых решений, то возникают вопросы: как найти начальную вершину и как перейти к другой вершине? Если использовать алгебраический язык, то последние вопросы можно сформулировать следующим образом: как нейти начальное допустимое базисное решение и как перейти к другому допустимому базисному решению, если начальное оказалось неоптимальным? В соответствии с симплексным методом, чтобы найти какое-нибудь допустимое базисное решение, необходимо разрешить уравнений (4) относительно каких-нибудь m базисных переменных, выразив их через остальные $k = n - m$ свободные переменные. Пусть, например, в качестве свободных выбраны первые $k = n - m$ переменных $x_1, x_2, \ldots x_k$, а остальные m выражены через них (5):

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1,1}x_1 + \alpha_{k+1,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+1,k}x_k + \beta_{k+1}$$
$$x_{k+2} = \alpha_{k+2,1}x_1 + \alpha_{k+2,2}x_2 + \ldots + \alpha_{k+2,k}x_k + \beta_{k+2}$$
$$\ldots$$
$$x_n = \alpha_{n+1}x_1 + \alpha_{n2}x_2 + \ldots + \alpha_{nk}x_k + \beta_n$$

Поскольку переменные $x_1, \ldots, x_k$ свободные, то им можно придать любые неотрицательные значения. Если свободные переменные приравнять нулю $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, то получим базисное решение $(0, \ldots 0, \beta_{k+1}, \ldots, \beta_n)^T$, которое будет допустимым, если базисные переменные $x_{k+1} = \beta_{k+1}, x_{k+2} = \beta_{k+2}, \ldots x_n = \beta_n$, в нем неотрицательны. Последнее имеет место в случае, когда все свободные члены $\beta_{k+1}, \ldots, \beta_n$ неотрицательны. Если и некоторые из базисных переменных окажутся отрицательными, то данный выбор свободных и базисных переменных допустимого решения не дает; соответствующая точка лежит не на границе, а вне многогранника допустимых решений. В последнем случае надо переразрешить систему уравнений относительно каких-то других базисных переменных, но делать это нужно не наугад, а так, чтобы приблизиться к многограннику допустимых решений. После того как найдено допустимое базисное решение, проверяется: не достигнут ли уже максимум целевой функции F. Для этого выражают функцию F через последние поручившиеся свободные переменные, подставив в функцию F вместо базисных переменных $x_{k+1}, \ldots, x_n$ их выражения (5) через свободные переменные $x_1, \ldots, x_k$. Целевая функция после выполнения такой операции будет представлена с помощью свободных переменных

$$F = \gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_k x_k \qquad (6)$$

Очевидно, что при $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$, $F = \gamma_0$. Далее выясняется, можно ли улучшить решение, т.е. увеличить функцию F, увеличивая какие-нибудь из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, (уменьшить их нельзя, так как все они равны нулю, а отрицательные значения переменных недопустимы). Если все коэффициенты $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ в выражении (6) отрицательны, то, увеличивая какие-то из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ сверх нуля, нельзя увеличить F. Следовательно, найденное решение является оптимальным. Если же среди коэффициентов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, в выражении (6) есть положительные, то, увеличивая некоторые из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а именно те, коэффициенты при которых положительны, можно увеличить F, т.е. улучшить решение. Пусть, например коэффициент γ_j положителен. Значит есть смысл увеличивать γ_j, т. е. перейти от данного допустимого решения к другому, где $x_j > 0$. Увеличение x_j полезно для целевой функции F, делает ее значения большими. Однако увеличивать x_j надо осторожно, так чтобы не стали отрицательными другие переменные $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, выраженные через свободные переменные.

Выясним, когда для базисных переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, опасно увеличение свободных переменных, т. е. когда оно может сделать хотя бы отдельные из базисных переменных отрицательными. Последнее будет иметь место, если, например, коэффициент при x_j в каком-то из уравнений (5) отрицателен. Если среди уравнений (5) нет уравнения с отрицательным коэффициентом при x_j, то переменную x_j можно увеличивать беспредельно, а, значит, линейная целевая функция F не ограничена сверху и оптимального решения не существует. Допустим, что это не так и что среди уравнений (5) есть такие, в которых коэффициент при x_j отрицателен, для переменных, стоящих в левых частях этих уравнений, увеличение x_j опасно – оно может сделать их отрицательными. Возьмем одну из таких базисных переменных x_j и посмотрим, до какой степени можно все же увеличивать, пока переменная x_l не станет отрицательной? Выделим из системы (5) l-е уравнение:

$$x_l = \alpha_{l1}x_1 + \alpha_{l2}x_2 + \ldots + \alpha_{lj}x_j + \ldots + \alpha_{lk}x_k + \beta_l$$

Здесь свободный член $\beta_l \geq 0$, а коэффициент α_{lj} отрицателен.

Если оставить $x_1 = \ldots = x_{j-1} = x_{j+1} = \ldots = x_k = 0$, то x_j можно увеличивать только до значения, равного β_l / δ_{lj} (получаемого из уравнения $\alpha_{lj}x_j + \beta_l = 0$), а при дальнейшем увеличений x_j переменная x_l станет отрицательной, чего допускать нельзя. Выберем ту из базисных переменных $x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_n$, которая раньше всех обратится в нуль при увеличении x_j. Полагая в (5) и (6) все свободные переданные, кроме x_j равными нулю, получим

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1,j} x_j + \beta_{k+1}$$
$$\dots$$
$$x_n = \alpha_{nj} x_j + \beta_n$$
$$F = \gamma_0 + \gamma_j x_j, (\gamma_j > 0).$$

Среди тех базисных переменных $x_{k+1}, \dots, x_n$ в выражения для которых свободная переменная x_j входит с отрицательным коэффициентом, найдется, по крайней мэре, одна базисная переменная x_r, которая при увеличения x_j станет отрицательной раньше других. Для того чтобы определить x_r надо найти среди всех отношений $-\beta_r/\delta_{lj}$ наименьшее, т.е. $-\beta_r/\delta_{rj} = \min(\beta_l/\delta_{lj})$, где берутся все l, для которых $\alpha_{lj} < 0$. Обозначим это минимальное значение δ. Очевидно, что $\delta > 0$. Если минимум достигается сразу при нескольких l, то за r можно брать любое из этих значений l. Теперь x_j можно увеличивать до величины δ, не опасаясь, что какая-нибудь базисная переменная станет отрицательной. Положим $x_1 = 0, \dots, x_{j-1} = 0, x_j = \delta, x_{j+1} = 0, \dots, x_k = 0$ и найдем значения остальных переменных

$$x_{k+1} = \alpha_{k+1,j} \delta + \beta_{k+1}$$
$$\dots$$
$$x_r = \alpha_{rj} \delta + \beta_r = 0$$
$$\dots$$
$$x_n = \alpha_{nj} \delta + \beta_n$$

и целевой функции

$$F_1 = \gamma_0 + \gamma_j \delta > F, (\gamma_j > 0)$$

В результате проведенных преобразований будет получен новый базис $x_{k+1}, \dots, x_{r-1}, x_j, x_{r+1}, \dots, x_n$, в котором переменная x_r заменена x_j ($x_j = \delta$) и при этом значение функции F увеличится, т.е. оно приблизится к искомому максимуму целевой функции. Указанные преобразования эквивалентны переразрешению системы уравнений (4) относительно других базисных переменных, при котором переменная x_j выводится из числа свободных переданных и вместо нее в группу свободных переменных переводится x_r. При таких преобразованиях осуществляется переход от базисного решения, в котором $x_1 = x_2 = x_j = \dots = x_k = 0$, к решению, в котором уже $x_j \neq 0$, а $x_1 = \dots = x_{j-1} = x_r = x_{j+1} = \dots = x_k = 0$.

Предположим, что уравнения типа (5) для нового набора базисных и свободных переменных составлены. Тогда можно выразить через новые свободные переменные и линейную целевую функцию F. Если все коэффициенты при переменных в новом выражении для F отрицательны, то оптимальное решение найдено: оно подучится, если все свободные переменные положить равными нулю. Если среди коэффициентов при переменных целевой функции есть положительные, то процедура улучшения решения продолжается: система ограничений – равенств вновь переразрешается относительно других базисных переменных, и так далее, пока не будет найдено оптимальное решение, обращающее функцию F в максимум.

Приведенное выше описание основной идеи симплексного метода было дано для случая нахождения максимума целевой функции F. Небольшое изменение характера действий позволяет распространить это описание также на случай отыскания минимума функции F. Рассматривая сущность симплексного метода, мы исходили из того, что система уравнений (7) приведена к виду (5), в котором m базисных, переменных выражены через остальные $n - m$, свободные переменные. Опишем один из методов выделения исходного базиса, называемый методом искусственного базиса.

Пусть система ограничений задана в виде (7), где все $b_i > 0$ ($i = I \dots m$). Введем вспомогательные или так называемые искусственные переменные $y_1, y_2, \dots y_m$, связанные с $x_1, x_2, \dots x_n$ уравнениями

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1 - (\alpha_{11} x_1 + \dots + \alpha_{1n} x_n), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= b_m - (\alpha_{m1} x_1 + \dots + \alpha_{mn} x_n) \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что система (7) имеет то же самое решение, что и система (4), при условии $y_1 = y_2 = \dots = y_m = 0$. В системе (4) искусственные переменные $y_1, y_2, \dots y_m$ образуют базисные переменные. Используя эти переменные, можно перейти к совокупности других m базисных переменных, не содержащей ни одной искусственной переменной, например, к $x_1, x_2, \dots x_m$.

Допустим, что после некоторых преобразований система (7) приведена к виду

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 - \left(\alpha_{1,m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{1n} x_n + \alpha'_{11} y_1 + \dots + \alpha'_{1m} y_m\right), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= \beta_m - \left(\alpha_{m,m+1} x_{m+1} + \dots + \alpha_{mn} x_n + \alpha'_{m1} y_1 + \dots + \alpha'_{mm} y_m\right) \end{aligned} \tag{8}$$

где $\beta_1 \geq 0, \dots, \beta_m \geq 0.$

В системе (8) мы инеем право положить $y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0$, тогда эта система становится эквивалентной система (5). В системе (8) переменные $x_1, x_2, \ldots x_m$ являются базисными переменными, т. е. тем самым задача выделения исходного базиса решена.

Оказывается, что для перехода от системы (7) к системе (8) можно применить симплексный метод. Действительно, будем при помощи этого метода решать задачу о минимизации функции

$$f = y_1 + y_2 + \ldots + y_m$$

при ограничениях, заданных системой (7), и условиях не отрицательности переменных $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0, \ldots, y_m \geq 0$. Система (7) записана в таком виде (выделен базис $y_1, \ldots y_m$), что может быть непосредственно применен симплексный метод. После некоторого числа шагов искомый минимум, очевидно, будет получен, причем, так как $f \geq 0$, то и $\min f \geq 0$.

Очевидно, если $\min f > 0$, система (8) не может иметь неотрицательных решений, для которых все $y_1 = 0, \ldots, y_m = 0$. Следовательно, и исходная система (7) также не может иметь неотрицательных решений, т. е. эта система не удовлетворяет условиям, которым должна удовлетворять система ограничений задачи линейного программирования, и эта задача в данном случае не имеет радения (система (7) несовместна).

Если $\min f = 0$, то вследствие не отрицательности $y_1, y_2, \ldots y_m$ должны быть равны нулю все искусственные переменные $y_1', \ldots, y_m'$ входящие в базисное решение $x_1', \ldots, x_n'$, $y_1', \ldots, y_m'$, которое минимизирует функцию f. Это означает, что в случае $\min f = 0$ данная система ограничений (7) совместна. Далее необходимо убедиться в том, что искусственные переменные не входят в базис. В противном случае следует проделать дальнейшие преобразования, чтобы вывести их из базиса.

Таким образом, мы показали, как выделить первый исходный базис для любой совместной системы ограничений, используемых в задачах линейного программирования. Укажем теперь некоторые формальные правила, облегчавшие вычисления по алгоритму симплексного метода.

Процесс получения решения задачи линейного программирования симплексным методом является шаговым. Поэтому оказывается удобным записывать результаты каждого вида в виде так называемых симплексных таблиц, заполняемых по определенным правилам. Каждое тождественное преобразование системы ограничений-равенств сводится к переходу от одной формулы к другой. Для простоты предположим, что нам известно первое допустимое базисное решение, т. е., систему ограничений-равенств задачи (4) можно записать в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 - (\alpha_{1,m+1} x_{m+1} + \alpha_{1,m+2} x_{m+2} + \ldots + \alpha_{1,n} x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (9) \\ x_m &= \beta_m - (\alpha_{m,m+1} x_{m+1} + \alpha_{m,m+2} x_{m+2} + \ldots + \alpha_{m,n} x_n) \end{aligned}$$

где все $\beta_i \geq 0$.

Это предположение нисколько не снижает общности, изложения, только делает его короче. Целевую функцию будем записывать как в виде,

$$F_1 = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n,$$

так, и в виде

$$F_1 = \lambda_0 + (\lambda_{m+1} x_{m+1} + \ldots + \lambda_n x_n),$$

получаемом после подстановки вместо базисных переменных их выражений через свободные переменные, где F_1 – значение функции F, соответствующее первой симплексной таблице.

Составим первую симплексную таблицу (таблица).

Симплексная таблица

Базис	Коэффициенты целевой функции	Свободные члены	c_1	c_2	……	c_{m+1}	……	c_n
			x_1	x_2	……	x_{m+1}	……	x_n
x_1	c_1	β_1	I	0	……	α_{1m+1}	……	α_{1n}
x_2	c_2	β_2	0	I	……	α_{2m+1}	……	α_{2n}
…..	…….	….	….	…..	……	…….	……	……
x_m	c_m	β_m	0	0	……	$\alpha_{m,m+1}$	……	α_{mn}
Целевая функция	F_1	λ_0	0	0	…….	$\lambda_{m,m+1}$	…….	λ_n

В данную таблицу записываются в определенном порядка все величины, которые требуются в процессе получения решения задачи. Последнюю строку этой таблицы принято называть индексной строкой.

В том случае, когда все элементы индексной строки (кроме λ_0) таблицы при решении задачи на максимум положительны (или при решении задачи на минимум – отрицательны), то полученное решение является оптимальным. Этим решением будет $x_1 = \beta_1, x_2 = \beta_2, x_m = \beta_m, x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \dots x_n = 0$. Значение целевой функции при этом, очевидно, равно

$$F_1 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \dots + c_m\beta_m, (F_1 = \lambda_0).$$

Если же среди элементов индексной строки есть отрицательные при решении задачи на максимум (положительные при решении задачи на минимум), то полученное решение не является оптимальным. В этом случае выбираем соответствующий наибольший по абсолютной величине элемент индексной строки. Изменение свободной переменной, входящей с выбранным коэффициентом в выражение для целевой функции, будет в наибольшей степени увеличивать значение целевой функции по сравнению с изменением любой другой свободной переменной (в наибольшей степени уменьшать значение целевой функции – в задаче на минимум). Выбранный элемент определяет ведущий столбец таблицы (например, столбец с номером C).

Далее необходимо выделить ту базисную переменную, которая станет отрицательной раньше других базисных переменных при увеличении свободной переменной ведущего столбца (переменной x_s). Для этого составляют отношения свободных членов (третий столбец) к положительным элементам C-го (ведущего) столбца и выбирают из них наименьшее. Пусть этим наименьшим отношением будет β_r/α_{rs},

т.е. $\beta_r / a_{rs} = min\,(\frac{\beta_k}{a_{ks}})$ (все $\alpha_{ks} > 0$). Тогда

r-я строка называется ведущей строкой. На пересечении r-й строки и C-го столбца находится элемент α_{rs}, который называется разрешающим элементом.

Следующим этапом является переход к новому базису, в котором переменная x_r из базисных переводится в небазисные, а переменная x_s делается базисной. Этот переход означает переход ко второй симплексной таблице. Получим формулы, с помощью которых следует вычислять элементы новой таблицы.

Переход к новой таблице осуществляется с помощью следующих тождественных преобразований, а именно r-е уравнение системы (9) следует разрешить относительно переменной x_s:

$$x_s = \frac{\beta_r}{d_{rs}} - \left(\frac{a_{r,m+1}}{a_{rs}} x_{m+1} + \frac{a_{r,m+2}}{da_{rs}} x_{m+2} + \dots + \frac{1}{a_{rs}} x_r + \dots + \frac{a_{rn}}{a_{rs}} x_n\right)$$

Это выражение для x_s представляется во все остальные уравнения и в выражение для функции F. Например, подстановка значения x_s в k-е уравнение ($k \neq S$) системы (9) приводит к уравнению:

$$x_k = \beta_k - \alpha_{k,m+1}x_{m+1} - \alpha_{k,m+2}x_{m+2} - \dots - \alpha_{ks}\left(\frac{\beta_r}{\alpha_{rs}} - \frac{\alpha_{r,m+1}}{\alpha_{rs}} x_{m+1} - \dots - \frac{1}{\alpha_{rs}} x_r - \dots - \frac{\alpha_{rn}}{\alpha_{rs}} x_n\right) -$$

$$- \alpha_{k,s+1}x_{s+1} - \dots - \alpha_{kn}x_n = \beta_k - \frac{\alpha_{ks}\beta_r}{\alpha_{rs}} - \left(\alpha_{k,m+1} - \frac{\alpha_{ks}\alpha_{r,m+1}}{\alpha_{rs}}\right) x_{m+1} - \dots + \frac{\alpha_{ks}}{\alpha_{rs}} x_r - \dots - (\alpha_{kn} - \alpha_{ks}\alpha_{rn}/\alpha_{rs}) x_n$$

Аналогично подстановка значения x_s в целевою функцию F приводит к выражению

$$\mathrm{F} = \lambda_0 - \frac{\lambda_s\beta_r}{\alpha_{rs}} - \left(\lambda_{m+1} - \frac{\lambda_s\alpha_{r,m+1}}{\alpha_{rs}}\right) x_{m+1} - \dots + \frac{\lambda_s}{\alpha_{rs}} x_r - \dots - (\lambda_n - \frac{\lambda_s\alpha_{rn}}{\alpha_{rs}}) x_n$$

Таким обрезом, из выражения для x_s следует, что элементы r-й строки новой таблицы равны соответствующим элементам отарой таблицы, разделенным на разрешающий элемент

$$\alpha'_{rj} = \frac{\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}} \ (j = 1 \ldots n),\ \beta'_r = \frac{\beta_r}{\alpha_{rs}} \qquad (10)$$

Элементы C-го столбца новой таблицы все равны 0, за исключением $\alpha'_{rs} = I$, так как стала базисной переменной и больше не входит в правую часть системы уравнений. Чтобы получить любой другой элемент новой симплексной таблицы, нужно от соответствующего элемента прежней таблицы отнять произведение элемента ведущей строки на элемент ведущего столбца, разделанное на разрешающий элемент, т. е.

$$\alpha'_{kj} = \alpha_{kj} = \frac{\alpha_{rj}\alpha_{ks}}{\alpha_{rs}},\ \beta'_k = \beta_k = \frac{\alpha_{ks}\beta_r}{\alpha_{rs}} \ (k \neq r) \quad (11)$$

Коэффициенты функции F или все элементы индексной строки новой симплексной таблицы могут быть вычислены по формулам:

$$\lambda'_j = \lambda_j - \frac{\lambda_s\alpha_{rj}}{\alpha_{rs}},\ \lambda'_0 = \lambda_0 - \frac{\lambda_s\beta_r}{\alpha_{rs}} \qquad (12)$$

Вторая симплексная таблица имеет такой же вид, кая и первая симплексная таблица. Только теперь переменная x_s стала базисно переменной и коэффициенты β_i, λ_{ij}, λ_j заменяются на β'_i, λ'_{ij}, λ'_j .

Если сразу все коэффициенты в индексной строке для свободных переменных оказались положительными (в задаче на максимум) или отрицательными в задаче на минимум), то оптимальное решение получено, и целевая функция принимает значение

$$F_2 = \lambda_0 - \frac{\lambda_s\beta_r}{\alpha_{rs}}$$

где F_1 – значение целевой функции во второй симплексной таблице. Соответственно, если эти условия не выполняются, необходимо переходить к следующей симплексной таблице, проводя тождественные преобразования по установленным выше правилам. Укажем дополнительно ещё одну возможность вычисления элементов индексной строки, исходя из представления целевой функции в виде $F_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$. Для этого преобразуем данное выражение следующим образом:

$$F_1 = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n =$$
$$= c_1 (\beta_1 - \alpha_{1,m+1}x_{m+1} - \alpha_{1,m+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{1n}x_n) +$$
$$+ c_2 (\beta_2 - \alpha_{2,m+1}x_{m+1} - \alpha_{2,m+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{2n}x_n) +$$
$$+ c_m (\beta_m - \alpha_{m,m+1}x_{m+1} - \alpha_{m,m+2}x_{m+2} - \ldots - \alpha_{mn}x_n) +$$
$$+ c_{m+1}x_{m+1} + c_{m+2}x_{m+2} + \ldots + c_nx_n$$

Объединив свободные члены и коэффициенты при $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$, получим

$$F_1 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_m\beta_m +$$
$$+ (c_{m+1} - c_1\alpha_{1,m+1} - c_2\alpha_{2,m+1} - \ldots - c_m\alpha_{m,m+1})\, x_{m+1} +$$
$$+ \ldots + (c_n - c_1\alpha_{1n} - c_2\alpha_{2n} - \ldots - c_m\alpha_{mn})\, x_n$$

Таким образом, мы получили явное выражение для коэффициентов целевой функции через коэффициенты α_{ij}, β_i, и c_i

$$\lambda_0 = c_1\beta_1 + c_2\beta_2 + \ldots + c_m\beta_m,$$
$$\lambda_j = c_1\beta_{1j} + c_2\beta_{2j} + \ldots + c_m\beta_{mj} - c_j,$$

где $j = m + 1, m + 2, \ldots, n$.

Обозначим $c_1\beta_{1j} + c_2\beta_{2j} + \ldots + c_m\beta_{mj}$ через h_j . Тогда $\lambda_j = h_j - c_j$ и элементы индексной строки могут вычисляться па этой формуле после того, как получены все элементы λ_{ij}, $i = 1 \ldots m$. При этих вычислениях используются элементы $c_1, c_2, \ldots c_n$, повторяющиеся в каждой симплексной таблице.

Итак, после конечного числа шагов будет либо получено оптимальное решение или установлено, что задача не имеет решения. При этом, однако, иногда могут встретиться случаи вырождения и зацикливания.

Скучай вырождения встретится, если свободный член уравнения, содержащего разрешающий элемент, равен нулю. В этом случае после очередного шага значение целевой функции не увеличится (или не уменьшится).

Поскольку значения базисных переменных ранения, равны свободным членам соответствующих уравнений (небазисные переменные мы принимаем разными нулю), то случай вырождения равносилен тому, что одна юга несколько базисных переменных равны нулю. В этом случае $(l + I)$-е значение целевой функции совпадает с l-м значением, т. е. $F_{l+1} = F_l$. Ясно, что это произойдет в том случае, если в последовательности базисов некоторые из них будут повторяться. При этом может случиться, что на каждом из последующих шагов имеет место вырождение, т. е. $F_l = F_{l+1} = F_{l+2} = \ldots$. В этом случае говорят, что в процессе решения задачи произошло зацикливание. Отметим, однако, что при решении конкретных задач случаи зацикливания крайне редки, причем его всегда мощно набежать, если изменить последовательность выбора базисов.

Указанная выше последовательность операций определяет алгоритм симплексного метода. Этот алгоритм позволяет решать задачи линейного программирования на программном продукте.

Комплексный анализ охватывает всю совокупность факторов и показателей явления (процесса). Учитывая его значимость, он будет рассмотрен отдельно.

В свою очередь тематический военно-экономический анализ связан с необходимостью анализа одного из факторов и показателей явления.

Классификация военно-экономического анализа по степени охвата анализируемых объектов предусматривает разделение на военно-хозяйственный и межхозяйственный военно-экономический анализ. При этом в первом случае, анализу подвергается отдельно взятая военно-хозяйственная единица, а во втором анализ осуществляется способом сравнения результатов (факторов и их показателей) военно-экономической деятельности однотипных (сопоставимых) военно-хозяйственных единиц.

Кроме того, следует дополнить данную классификацию в связи с переходом Вооруженных сил РФ на бюджетный учет с 1.01.2005 года, поскольку это позволяет применять практически в полном объеме управленческий учет и его методы, в том числе контроллинг, даже в воинской части.

Таким образом, разработка эффективной системы комплексного военно-экономического анализа ресурсного обеспечения Вооруженных сил является важнейшим условием реализации системного комплексного подхода. Системный анализ экономики Вооруженных сил заключается в том, что она (экономика) рассматривается в качестве относительно обособленной системы в рамках экономической системы более высокого порядка.

Этап выбора решений связан с проведением комплекса расчетов, в котором активную роль играют эксперты, используются математические методы, расчетные алгоритмы и вычислительная техника. Роль симплексного анализа на данном этапе заключается в определении стратегии и критериев выбора, а также в анализе зависимости результатов выбора от важности показателей оценивания и применяемых критериев, системы предпочтений и других исходных данных. Эффективное проведение этого анализа требует оперативного выполнения расчетов, что может быть реализовано с помощью диалогового режима общения на программном продукте рассчитать расходы в плановом режиме. В связи с этим возникают две конкретные задачи автоматизации выбора решений; разработка комплекса программ для реализации в программном продукте расчетных алгоритмов задачи выбора, а также разработка сервисных программ для обеспечения диалогового режима работы, ввода и вывода информации.

Выполнение этих задач осуществляется автоматизированной подсистемой выбора решений, являющейся составной частью автоматизированной системы анализа и прогнозирования расчетов по расходам не только финансовым, но и любым затратам на оборону государства.

Таким образом автоматизированная система анализа и прогнозирования характеристик должна включать следующие основные элементы:

- объект исследования, представленный набором имитационных и прогнозных моделей различных уровней детализации его описания и моделей входных воздействий для них. Использование набора моделей различной степени сложности позволяет расширить круг задач, решаемых с помощью автоматизированной системы на разных стадиях движения затрат, а также увеличить объем и повысить качество распределения расходов по отраслям, необходимой для экономического сопровождения системы;
- банк, обеспечивающий прием, хранение и выдачу средств, необходимых для решения возникающих проблем в связи с боевой подготовкой;
- библиотеку модулей процедур анализа, подготовки и принятия решений, например, таких, как процедуры анализа чувствительности показателей назначения к воздействующим факторам, оптимизации, выделения множества эффективных решений и т.п.;
- управляющую программу, которая в соответствие с поставленной задачей исследований осуществляет выбор необходимых процедур и исходных данных, организует проведение имитационных экспериментов и выполнение формализованных, процедур анализа, а также осуществляет выдачу результатов исследования на внешние устройства.

Библиографический список

1. Баканов М.И., Мельник М.В., Шеремет А.Д. Теория экономического анализа. М.: Финансы и статистика, 2008.

2. Батьковский А.М., Коробов С.П., Хрусталёв Е.Ю. Метод оптимизации оборонных расходов в условиях жестких бюджетных ограничений // Экономика и математические методы. 2001. Т.37. №1.

3. Викулов С.Ф. Военно-экономический анализ: учебник / под ред. С.Ф. Викулова. М.: ВУ, 2015.

4. Викулов С.Ф., Хрусталев Е.Ю. Методы оценки военно-экономической эффективности военного строительства // Приоритеты России. 2010. № 21(78). С. 8-13.

5. Викулов С.Ф., Хрусталёв Е.Ю. Военная экономика России: научная дисциплина и отрасль производства // Мировая экономика и международные отношения. 2009. №7.

6. Гасс С. Линейное программирование (методы и приложения). М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961.

7. Муравьёв В.И. Метод последовательного улучшения с базисом переменного размера для задач линейного программирования // Исследование операций и методы статистического моделирования. Л.: ЛГУ, 1972.

8. Шамрай Н.Б. Практическое линейное программирование для экономистов. Владивосток: Изд-во дальневосточного университета, 2009. С. 44.

9. Шеремет А.Д., Ионова А.Ф. Финансы предприятий: менеджмент и анализ. М.: ИНФРА-М, 2009.

10. Шеремет А.Д. Комплексный анализ хозяйственной деятельности. М.: ИНФРА-М, 2009.