

УДК 338.2

*Э. А. Геворкян*

Московский университет имени С.Ю. Витте, Москва, e-mail: gevor\_mesi@mail.ru

*Е. Е. Сурина*

Московский университет имени С.Ю. Витте, Москва, e-mail: esurina@muiv.ru

## ДИНАМИКА ИЗМЕНЕНИЯ НАЦИОНАЛЬНОГО ДОХОДА В МОДЕЛИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА С ВОЗМУЩЕНИЕМ

**Ключевые слова:** модель осциллятора, национальный доход, дифференциальное уравнение с правой частью, издержки, резонанс.

Настоящая работа посвящена выявлению закономерностей изменения национального дохода в зависимости от времени в предположении, что эта функция удовлетворяет неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению гармонического осциллятора, правая часть которого (внешние инвестиции) представляет произведение экспоненты и периодической функции, как функции от времени. Определен экономический смысл и остальных членов этого дифференциального уравнения (темп изменения национального дохода, рыночная сила, транзакционные издержки). При нахождении его общего решения (сумма общего решения соответствующего однородного дифференциального уравнения и одного частного решения неоднородного дифференциального уравнения) применены методы Эйлера и метод вариации произвольных постоянных. Рассмотрен случай резонанса (частоты собственных колебаний национального дохода и колебаний внешних инвестиций совпадают), когда отсутствуют транзакционные издержки (не учитывается затухание) и когда они присутствуют (учитывается затухание). На основании полученных аналитических решений в случае резонанса построены графики изменения национального дохода в зависимости от времени. Причем при их построении взяты различные значения параметров (коэффициент затухания, частота собственных колебаний национального дохода), которые определяют характер динамики национального дохода. Показан осциллирующий характер национального дохода как функция от времени.

*E. A. Gevorkyan*

Moscow Witte University, Moscow, e-mail: gevor\_mesi@mail.ru

*E. E. Surina*

Moscow Witte University, Moscow, e-mail: esurina@muiv.ru

## DYNAMICS OF NATIONAL INCOME CHANGE IN HARMONIC OSCILLATOR MODEL WITH DISTURBANCE

**Keywords:** oscillator model, national income, differential equation with right side, costs, resonance.

This work is devoted to identifying the patterns of changes in national income depending on time on the assumption that this function satisfies the inhomogeneous ordinary differential equation of a harmonic oscillator, the right side of which (external investment) represents the product of an exponent and a periodic function as a function of time. The economic meaning of the other members of this differential equation (the rate of change in national income, market power, transaction costs) has been determined. When finding its general solution (the sum of the general solution of the corresponding homogeneous differential equation and one particular solution of the inhomogeneous differential equation), Euler's methods and the method of variation of arbitrary constants are used. The case of resonance is considered (the frequencies of natural fluctuations of national income and fluctuations of external investment coincide), when there are no transaction costs (attenuation is not taken into account) and when they are present (attenuation is taken into account). On the basis of the obtained analytical solutions in the case of resonance, graphs of changes in national income depending on time were constructed. Moreover, when constructing them, various values of the parameters were taken (damping coefficient, the frequency of natural fluctuations of the national income), which determine the nature of the dynamics of the national income. Shows the oscillating nature of national income as a function of time.

### Введение

Начиная с середины 1990-х годов в научной литературе опубликовались работы, посвященные экономфизике. Работы [1-3]

посвящены обзору известных в научной литературе попыток провести исследования экономических процессов с использованием теории и методов, разработанных физиками

при решении различных физических задач. В работах [4-6] экономические задачи, связанные с колебанием цен и объема выпуска товаров, с анализом финансовых временных рядов, с объяснением закона спроса и предложения, решаются в рамках физических моделей с использованием математических методов. Автор монографии [7] предлагает теоретико-методологические основы и математический инструментарий экономифизики. В работе определены понятия экономической скорости, экономического ускорения, экономической силы, экономической работы и экономической энергии. Статьи [8-9] посвящены исследованию временной зависимости национального дохода, который удовлетворяет дифференциальному уравнению гармонического осциллятора. В частности, в [9] исследован случай периодической зависимости от времени внешнего воздействия (внешние инвестиции) без учета и с учетом затухания (транзакционные издержки). В настоящей работе решается аналогичная задача, когда внешнее воздействие зависит от времени в виде произведения экспоненты и периодической функции.

**Целью** исследования является нахождение и анализ национального дохода как функция от времени, удовлетворяющая неоднородному дифференциальному уравнению гармонического осциллятора с внешним возмущением (внешние инвестиции), когда возмущение имеет вид произведения двух функций от времени: экспоненты и периодической функции.

*Постановка задачи и её решение*

Так как равновесие в макроэкономической системе считается её динамическое состояние в виде колебательного движе-

ния с малой амплитудой, то представляет определенный интерес рассматривать динамику изменения национального дохода в модели гармонического осциллятора с возмущением.

Рассмотрим модель осциллятора с внешним возмущением и допустим, что национальный доход как функция от времени ( $Y(t)$ ) в этой модели без учета затухания (транзакционные издержки) (коэффициент затухания  $\eta = 0$ ) удовлетворяет следующему неоднородному обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами второго порядка

$$\frac{d^2 Y(t)}{dt^2} + \omega_0^2 \cdot Y(t) = F_0 \cdot e^{kt} \cdot \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $d^2 Y(t) / dt^2$  соответствует темпу изменения национального дохода,  $\omega_0^2 \cdot Y(t)$  ответственен рыночной силе, которая старается возвращать систему к точке равновесия,  $\omega_0$  – собственная частота колебаний осциллятора, правая часть уравнения показывает внешние инвестиции, меняющихся во времени,  $k$  – темп прироста внешних инвестиций,  $\omega$  – частота колебаний внешних инвестиций,  $F_0$  – амплитуда колебаний внешних инвестиций.

Отметим, что если для нахождения общего решения однородного уравнения, соответствующего (1), пользоваться методом Эйлера, а для нахождения одного частного решения неоднородного уравнения (1) пользоваться методом вариации произвольных постоянных, то есть искать в виде

$$Y_{u.n.}(t) = c_1(t) \cos \omega_0 t + c_2(t) \sin \omega_0 t, \quad (2)$$

то относительно неизвестных  $c_1(t)$  и  $c_2(t)$  получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dc_1(t)}{dt} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{dc_2(t)}{dt} \cdot \sin \omega_0 t = 0, \\ -\frac{dc_1(t)}{dt} \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{dc_2(t)}{dt} \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t = F_0 \cdot e^{kt} \cdot \cos \omega t. \end{cases} \quad (3)$$

Решение (3) приводит к следующим аналитическим выражениям для  $c_1(t)$  и  $c_2(t)$

$$c_1(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \cdot e^{kt} \cdot \left[ \frac{(\omega + \omega_0) \cdot \cos(\omega + \omega_0)t - k \cdot \sin(\omega + \omega_0)t}{k^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{k \cdot \sin(\omega - \omega_0)t - (\omega - \omega_0) \cdot \cos(\omega - \omega_0)t}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right], \quad (4)$$

$$c_2(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \cdot e^{kt} \cdot \left[ \frac{k \cdot \cos(\omega + \omega_0)t + (\omega + \omega_0) \cdot \sin(\omega + \omega_0)t}{k^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{k \cdot \cos(\omega - \omega_0)t + (\omega - \omega_0) \cdot \sin(\omega - \omega_0)t}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right]. \quad (5)$$

Подставляя (4) и (5) в (2) и учитывая, что  $Y_{\text{ч.л.}}(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$ , где  $c_1$  и  $c_2$  – положительные постоянные, после некоторых алгебраических преобразований, получим

$$Y(t) = c_1 \cdot \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{2\omega_0} \cdot e^{kt} \cdot \left[ \frac{(\omega + \omega_0) \cos \omega t - k \sin \omega t}{k^2 + (\omega + \omega_0)^2} - \frac{(\omega - \omega_0) \cos \omega t - k \sin \omega t}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right]. \quad (6)$$

Величины  $c_1$  и  $c_2$  в (6) можно определить из следующих начальных условий Коши

$$Y(t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{dY(t)}{dt} \Big|_{t=0} = 0. \quad (7)$$

Вычисления приводят к выражениям

$$c_1 = \frac{F_0}{2\omega_0} \cdot \left[ \frac{\omega - \omega_0}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{\omega + \omega_0}{k^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right], \quad (8)$$

$$c_2 = \frac{F_0 \cdot k}{2\omega_0^2} \cdot \left[ \frac{2\omega - \omega_0}{k^2 + (\omega - \omega_0)^2} - \frac{2\omega + \omega_0}{k^2 + (\omega + \omega_0)^2} \right]. \quad (9)$$

В частном случае, когда  $k = 0$  из (6) с учетом (8) и (9) получим

$$Y(t) = \frac{2F_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \cdot \sin \frac{(\omega + \omega_0)t}{2} \cdot \sin \frac{(\omega - \omega_0)t}{2}. \quad (10)$$

Заметим, что последнее совпадает с результатом, полученным в работе [9]. Стоит отметить, что определенный интерес представляет случай резонанса. Выражение для  $Y(t)$  в этом случае можно найти, если в (8) перейти к пределу при  $\omega \rightarrow \omega_0$  с учетом (8) и (9). Итак, имеем

$$Y_{\text{рез}}(t) = \frac{F_0}{k^2 + 4\omega_0^2} \cdot \left[ \frac{2\omega_0^2 - k^2}{k\omega_0} \cdot \sin \omega_0 t - \cos \omega_0 t + \frac{e^{kt}}{k} (k \cos \omega_0 t + 2\omega_0 \sin \omega_0 t) \right]. \quad (11)$$

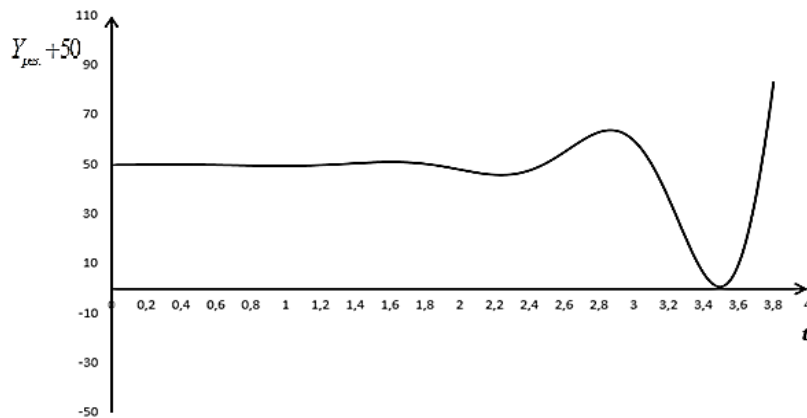


Рис. 1. Кривая изменения  $Y_{\text{рез}}(t) + 50$  согласно (11) при  $\eta = 0$ ;  $\omega_0 = 5$ ;  $k = 2$ ;  $F_0 = 1$ ;  $0 \leq t \leq 3,8$

Ниже рассмотрим случай, когда  $\eta \neq 0$  (учитываем транзакционные издержки). В этом случае в левой части уравнения (1) добавится член  $2\eta \frac{dY(t)}{dt}$ , то есть функция  $Y(t)$  будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2\eta \frac{dY(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot Y(t) = F_0 \cdot e^{kt} \cdot \cos \omega t. \quad (12)$$

Решая однородное уравнение  $\frac{d^2Y(t)}{dt^2} + 2\eta \frac{dY(t)}{dt} + \omega_0^2 \cdot Y(t) = 0$ , получим:

$$1. Y_{o.o.}(t) = (c_1 + c_2 \cdot e) \cdot e^{-\eta t} \text{ при } \eta^2 = \omega_0^2. \quad (13)$$

$$2. Y_{o.o.}(t) = \left( c_1 \cdot e^{\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} \cdot t} + c_2 \cdot e^{-\sqrt{\eta^2 - \omega_0^2} \cdot t} \right) \cdot e^{-\eta t} \text{ при } \eta^2 > \omega_0^2. \quad (14)$$

$$3. Y_{o.o.}(t) = \left[ c_1 \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) \right] \cdot e^{-\eta t} \text{ при } \eta^2 < \omega_0^2. \quad (15)$$

Частное решение уравнения (12) будем искать методом подбора, рассматривая следующие случаи:

а)  $k + i\omega$  не совпадает с  $-\eta + i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$  при  $\omega_0^2 > \eta^2$  ( $k \neq -\eta, \omega \neq \sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$ ).

В этом случае  $Y_{ч.н.}(t)$  ищем в виде

$$Y_{ч.н.}(t) = (A \cos \omega t + B \sin \omega t) \cdot e^{kt}. \quad (16)$$

где  $A$  и  $B$  пока неизвестные коэффициенты. Требуя, чтобы (16) удовлетворяло уравнению (12), для коэффициентов  $A$  и  $B$  получим

$$A = \frac{k(k+2\eta) \cdot F_0}{k^2(k+2\eta)^2 + 4\omega^2(k+\eta)^2}, \quad B = \frac{2F_0 \cdot \omega \cdot (k+\eta)}{k^2(k+2\eta)^2 + 4\omega^2(k+\eta)^2}. \quad (17)$$

Итак, в этом случае общее решение уравнения (12) принимает вид

$$Y(t) = \left[ c_1 \cdot \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) \right] \cdot e^{-\eta t} + e^{kt} \cdot \frac{F_0}{k^2(k+2\eta)^2 + 4\omega^2(k+\eta)^2} \cdot \left[ k(k+2\eta) \cos \omega t + 2\omega(k+\eta) \sin \omega t \right]. \quad (18)$$

б)  $k + i\omega = -\eta + i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$  ( $k = -\eta, \omega^2 = \omega_0^2 - \eta^2 = \omega_0^2 - k^2$ ).

В этом случае  $Y_{ч.н.}(t)$  будем искать в виде

$$Y_{ч.н.}(t) = t \cdot e^{kt} \cdot (A \cos \omega t + B \sin \omega t), \quad (19)$$

где  $A$  и  $B$  пока неизвестные коэффициенты. Требуя, чтобы (19) удовлетворяло уравнению (12), для  $A$  и  $B$  получим

$$A = 0, B = F_0 / 2\omega, \quad (20)$$

Тогда  $Y_{ч.н.}(t) = \frac{F_0}{2\omega} t \cdot e^{kt} \cdot \sin \omega t$  и общее решение уравнения (12) принимает вид

$$Y(t) = e^{kt} \cdot \left[ c_1 \cos \omega t + \left( c_2 + \frac{F_0}{2\omega} \cdot t \right) \cdot \sin \omega t \right]. \quad (21)$$

Постоянные  $c_1$  и  $c_2$ , которые входят в (18) и (21), находятся с помощью начальных условий Коши (7) и выражаются формулами:

а) 
$$c_1 = -\frac{k(k+2\eta) \cdot F_0}{k^2(k+2\eta)^2 + 4\omega^2(k+\eta)^2}, \quad (22)$$

$$c_2 = \frac{(k + \eta)[2\omega^2 - k(k + 2\eta)] \cdot F_0}{\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot [k^2(k + 2\eta^2) + 4\omega^2(k + \eta)^2]} \quad (23)$$

б)  $c_1 = c_2 = 0$ . (24)

Ниже приведем общее решение дифференциального уравнения (12) в случаях а) и б).

а) 
$$Y(t) = \frac{F_0}{k^2(k + 2\mu)^2 + 4\omega^2(k + \eta)^2} \left\{ e^{-\eta t} \left[ \frac{(k + \eta)(2\omega^2 - k^2 - 2k\eta)}{\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) - k(k + 2\eta) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) \right] + [k(k + 2\eta) \cos \omega t + 2\omega(k + \eta) \sin \omega t] \cdot e^{kt} \right\}. \quad (25)$$

б) 
$$Y(t) = \frac{F_0}{2\omega} \cdot t \cdot e^{kt} \cdot \sin \omega t. \quad (26)$$

Если в (25) и (26) перейти к пределу при  $\omega \rightarrow \omega_0$  (случай резонанса), то получим выражения для  $Y_{рез}(t)$  в случаях а) и б) в виде:

а) 
$$Y_{рез.}(t) = \frac{F_0}{k^2(k + 2\eta)^2 + 4\omega_0^2(k + \eta)^2} \left\{ e^{-\eta t} \left[ \frac{(k + \eta)(2\omega_0^2 - k^2 - 2k\eta)}{\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}} \cdot \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) - k(k + 2\eta) \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2} \cdot t) \right] + [k(k + 2\eta) \cos \omega_0 t + 2\omega_0(k + \eta) \sin \omega_0 t] \cdot e^{kt} \right\}. \quad (27)$$

б) 
$$Y_{рез}(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \cdot t \cdot e^{kt} \cdot \sin \omega_0 t. \quad (28)$$

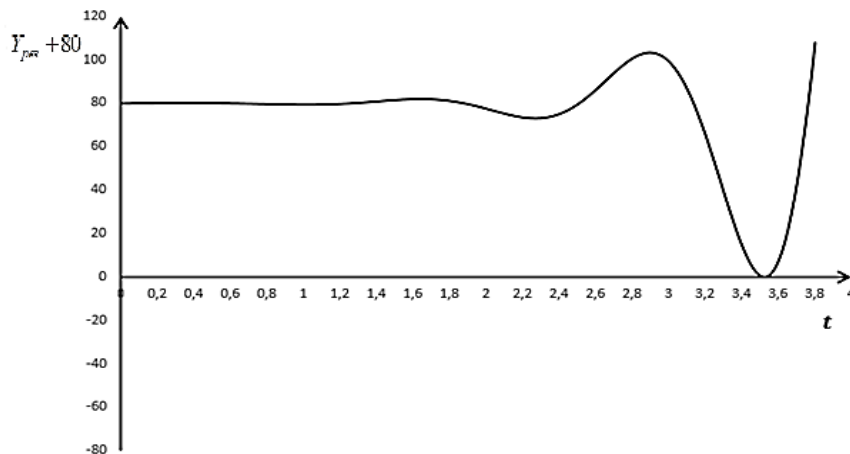


Рис. 2. Кривая изменения  $Y_{рез}(t) + 80$  согласно (27) при  $k + i\omega \neq -\eta + i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$ ;  $\eta = 0,1$ ;  $\omega_0 = 5,6$ ;  $F_0 = 1$ ;  $0 \leq t \leq 3,8$

Из графиков изменения  $Y(t)$  в случае резонанса (рис. 1-3) виден колебательный характер динамики национального дохода в зависимости от времени. Во всех трех случаях минимумы и максимумы достигаются почти при одном и том же значении  $t$ , но они отличаются своими величинами.

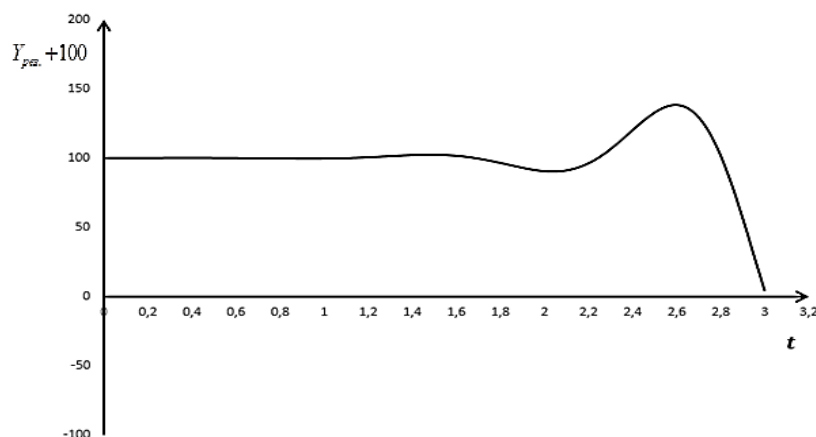


Рис. 3. Кривая изменения  $Y_{рез}(t) + 100$  согласно (28) при  $k + i\omega = -\eta + i\sqrt{\omega_0^2 - \eta^2}$ ;  $k = 2$ ;  $\eta = 0,1$ ;  $\omega_0 = 5,6$ ;  $F_0 = 1$ ;  $0 \leq t \leq 3,8$

### Заключение

В работе в физической модели осциллятора с внешним возмущением (внешние инвестиции) исследована динамика изменения во времени национального дохода. Предполагается, что внешние инвестиции зависят от времени в виде произведения показательной функции (экспоненты) и периодической функции. Рассмотрены случаи, когда пренебрегаем трансакционными издержками и когда их учитываем. Проведен-

ный аналитический и графический анализ результатов в случае резонанса показывает, что колебательный характер  $Y(t)$  сохраняется. Отметим также, что проведенное в данной работе исследование представляет интерес и с точки зрения развития теоретической эконофизики, и с практической точки зрения возможности использования материалов исследования при чтении курса «Моделирование макроэкономики» для студентов высших учебных заведений.

### Библиографический список

1. Чернавский Д.С., Старков Н.И., Щербаков А.В. О проблемах физической экономики // УФН. 2002. Т. 172. № 9. С. 1045-1066.
2. Хавинсон М.Ю. Эконофизика: от анализа финансов до судьбы человечества // Пространственная экономика. 2015. № 1. С. 144-166.
3. Bali S. Econophysics. Thermoeconomics and Phynance. The Journal of International Social Research. 2011. V. 4. No. 18. P. 379-388.
4. Царев И.Г. Динамические системы в экономике // Аудит и финансовый анализ. 2006. № 3. С. 285-303.
5. Мантенья Р.Н., Стенли Г.Ю. Введение в эконофизику: корреляции и сложность в финансах / Перевод с английского под редакцией В.Я. Гебескирия. М.: URSS, Либроком. 2017. 192 с.
6. Мудрик Д.Г., Попков С.Ю., Ястребова Е.В. Экономическая физика: закон спроса и предложения, как результат действия универсального закона сохранения материи и энергии в экономике. Понятие сил в экономике // Проблемы экономики и юридической практики. 2017. № 3. С. 10-16.
7. Давыдянец Д.Е. Физическая экономика: теория, методология, системообразующие начала: монография. М.: МИРАКЛЬ, 2016. 77 с.
8. Геворкян Э.А., Синчуков А.В., Татарников О.В. Динамика изменения национального дохода в рамках модели гармонического осциллятора // Фундаментальные исследования. 2018. № 10. С. 26-30.
9. Геворкян Э.А., Синчуков А.В., Татарников О.В. Особенности динамики изменения национального дохода в рамках модели гармонического осциллятора с учетом внешнего воздействия // Фундаментальные исследования. 2020. № 5. С. 54-59.
10. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: YOYO Media, 2012. 424 с.